Tema: derivate parțiale, matrice jacobiană

1. Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy + x + y^2 + 5.$$

Soluție.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y,\ J_f(x, y) = (y + 1, x + 2y)$$

2. Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (x + x^2, 2x + 1).$$

Soluție.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x) = 1 + 2x,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) = 2,\ J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției:

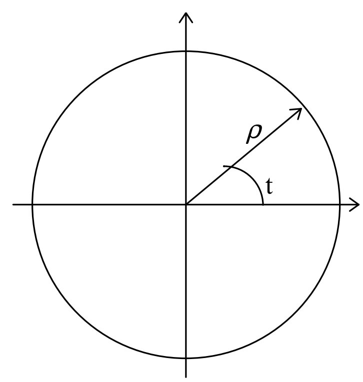
$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xy, x^2 + y, x \ln y).$$

Soluție.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y,\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x,\quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2x,\quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 1,\quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = \ln y,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y},\ J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \\ \ln y & \dfrac{x}{y} \end{pmatrix}$$

4. Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul parametrizării $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}$.



Soluție.

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos t,\ \frac{\partial x}{\partial t} = -\rho \sin t,\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin t,\ \frac{\partial y}{\partial t} = \rho \cos t,$$

$$J_F = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho \sin t \\ \sin t & \rho \cos t \end{pmatrix}$$

5. Calculați, folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, derivatele parțiale și Jacobianul compunerii funcțiilor

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y)=\left(x+y,xy,x^2+2xy\right) \text{ și}$$
$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ g(x,y,z)=\left(xz,y^2+z\right).$$

Soluție.

Fie $h=g\circ f, h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, h(x,y)=g(f(x,y))$, folosim formula Jacobianului compunerii de funcții: $J_h(x,y)=J_g(f(x,y))\cdot J_f(x,y)$.

$$J_g(f(x,y))=\begin{pmatrix} x^2+2xy & 0 & x+y \\ 0 & 2xy & 1\end{pmatrix} \text{ și } J_f(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 2x+2y & 2x\end{pmatrix}, \text{ așadar:}$$

$$J_h=\begin{pmatrix} 3x^2+6xy+4y^2 & 3x^2+4xy \\ 2xy^2+2x+2y & 2x^2y+2x\end{pmatrix}.$$

Derivatele parțiale ale funcției compuse pot fi obținute fie din Jacobian, fie prin calcul, de exemplu:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g_1}{\partial f_1}(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g_1}{\partial f_2}(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g_1}{\partial f_3}(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)=$$
$$f_3(x,y)\cdot 1+0\cdot y+f_1(x,y)\cdot(2x+2y)=x^2+2xy+(x+y)(2x+2y)=3x^2+6xy+2y^2$$

6. Se consideră $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\left(x^2+y,2xy\right)$.

Calculați derivatele parțiale în funcție de parametrii transformării de coordonate polare în plan.

Soluție:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho}=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=2\rho\cos t\cdot\cos t+1\cdot\sin t=2\rho\cos^2 t+\sin t,$$

și analog obținem toate derivatele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-2\rho^2\sin t\cos t+\rho\sin t,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho}=4\rho\sin t\cdot\cos t,\ \frac{\partial f_2}{\partial t}=2\rho^2\cos 2t$$

7. Calculați derivatele parțiale de ordin 2 ale funcției

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\left(x^2z+y,xyz\right).$$

Soluție:

Derivatele parțiale de ordin I sunt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2xz,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}=1,\ \frac{\partial f_1}{\partial z}=x^2,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}=yz,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}=xz,\ \frac{\partial f_2}{\partial z}=xy$$

iar cel de ordin II se obțin prin derivarea acestora:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2z\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} = 2x\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} = 2x\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = z\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} = y\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = z\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} = x\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} = y\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} = x\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0\,.$$

8. Calculați diferențialele de ordin I şi II ale funcției:

$$f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}\,,\ f(x,y) = x^2 y + y^3\,.$$

<u>Soluție</u>:

Diferențiala de ordin I este

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = 2xydx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy$$

iar cea de ordin II este

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2 = 2ydx^2 + 4xdxdy + 6ydy^2$$

9. Calculați diferențialele de ordin I şi II ale funcției:

$$f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}\,,\ f(x,y,z) = xyz + x^2 z + y\,.$$

<u>Soluție</u>:

Diferențiala de ordin I este:

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz =$$

$$(yz + 2xz)dx + (xz + 1)dy + \left(xy + x^2\right)dz$$

iar diferențiala de ordin II este:

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)dz^2 +$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)dzdx =$$

$$2zdx^2 + 2zdxdy + 2xdydz + 2(y + 2x)dzdx$$

Tema: extremele funcțiilor de mai multe variabile

1. Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

Soluție:

Determinăm soluțiile sistemului de ecuații: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$

adică

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$$

sistem simetric având soluțiile $(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)$, care sunt **punctele critice** ale funcției.

Pentru a stabili care dintre aceste puncte este punct de extrem calculăm diferențiala de ordin II:

$$d^2 f(x,y)=6xdx^2+12ydxdx+6xdy^2$$

şi Hessianul

$$\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Pentru $(1,2)$, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=1>0, \Delta_2=-3<0$ adică nu este nici pozitiv definită nici negativ definită deci punctul nu este de extrem; pentru $(2,1)$, matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=2>0, \Delta_2=3>0$ adică este pozitiv definită deci punctul este punct de minim local; pentru $(-1,-2)$, matricea $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=-1<0, \Delta_2=-3<0$ adică nu este nici pozitiv definită nici negativ definită deci punctul nu este de extrem; pentru $(-2,-1)$, matricea $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=-2<0, \Delta_2=3>0$ adică este negativ definită deci punctul este punct de maxim local;

2. Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}\,,\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y\,.$$

<u>Soluție</u>:

Determinăm punctele critice rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \text{ deci } x = 1, y = 0\,.$$

Calculăm diferențiala de ordin II a funcției

$$d^2 f(x,y) = 2dx^2 + 2dxdx + 2dy^2\,;$$

Hessianul este $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi are $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 3 > 0$, deci punctul $(1,0)$ este punct de minim local.

5. Arătați că funcția $g : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathsf{R}^2, g(x,y) = \left(\dfrac{xy+2}{3}, \dfrac{x^2+y}{4}\right)$ este contracție.

<u>Soluție</u>:

Folosim formula de tip Lagrange:

$$\|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)\|_\infty \le \sup\|g'(u,v)\|_\infty \|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)\|_\infty$$

ceea ce spune că ori de câte ori $\sup\|g'(u,v)\|_\infty < 1$, funcția este contracție (proprietate întâlnită ți în cazul funcțiilor scalare).

Avem

$$g©(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{v}{3} & \dfrac{u}{3} \\ \dfrac{x}{2} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix},\ \|g'(u,v)\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{v}{3}\right| + \left|\frac{u}{3}\right|, \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|\right\}$$

iar

$$\|g'(u,v)\|_\infty \le= \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}\,.$$

Este uşor de observat că $g : ([-1,1] \times [-1,1]) \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$ deci funcția g satisface ipotezele de aplicare a principiului contracțiilor.

Tema: derivatele funcțiilor implcite

1. Se consideră sistemul: $\begin{cases} u+v-x-y=0 \\ xu+yv-1=0 \end{cases}$.

Calculați derivatele funcțiilor implicite *u* şi *v*, în raport cu *x* şi *y*.

Soluție: Există trei modalități de calcul.

I. Utilizăm teorema funcțiilor implicte, astfel:

Fie $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $X=(x,y)$, $Y=(u,v)$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ u & v\end{pmatrix},\ \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix}y & -1\\ -x & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial X}=-\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix}y & -1\\ -x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ u & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y+u}{y-x} & \frac{y+v}{y-x}\\ \frac{x+u}{x-y} & \frac{x+v}{x-y}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y+u}{y-x},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y+v}{y-x},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x+u}{x-y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x+v}{x-y}$$

II. Utilizăm determinanții funcționali:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ u & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{-y-u}{y-x}=\frac{y+u}{y-x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,v)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ v & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{-y-v}{y-x}=\frac{y+v}{y-x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,x)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{u+x}{y-x}=\frac{x+u}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,y)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{v+x}{y-x}=\frac{x+v}{x-y}$$

III. Scriem sistemul liniar obținut prin egalarea cu zero a diferențialei fiecărei ecuații din sistem:

$$\begin{cases} du + dv - dx - dy = 0 \\ xdu + ydv + udx + vdy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du + dv = dx + dy \\ xdu + ydv = -udx - vdy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{y+u}{y-x}dx + \dfrac{y+v}{y-x}dy \\ dv = \dfrac{x+u}{x-y}dx + \dfrac{x+v}{x-y}dy \end{cases}$$

2. Fie $\cos(x+y+z)+z=0$. Calculați derivatele parțiale ale funcției implicite z, în raport cu *x* şi *y*.

<u>Soluție</u>: Notăm cu *f* membrul stâng al ecuației, $f(x,y,z)=\cos(x+y+z)+z$, iar derivatele funcției implicite sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-\sin(x+y+z)}{-\sin(x+y+z)+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-\sin(x+y+z)}{-\sin(x+y+z)+1}$$

3. Fie $\begin{cases} y^2 + x + xz = 1 \\ yz - x + z = 4 \end{cases}$. Calculați $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ şi $\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

<u>Soluție</u>: Cel mai simplu este să scriem sistemul liniar obținut prin diferențierea fiecărei ecuații: $\begin{cases} (1+z)dx + 2ydy + xdz = 0 \\ -dx + zdy + (y+1)dz = 0 \end{cases}$ pe care îl rezolvăm în raport cu *dz*:

$$\begin{cases} (1+z)dx + 2ydy = -xdz \\ -dx + zdy = -(y+1)dz \end{cases}, \quad \begin{cases} dx = \dfrac{-xz + 2y^2 + 2y}{z^2 + z + 2y}dz \\ dy = \dfrac{-yz - y - z - x - 1}{z^2 + z + 2y}dz \end{cases},$$

deci $\dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{-xz + 2y^2 + 2y}{z^2 + z + 2y}$ şi $\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{-yz - y - z - x - 1}{z^2 + z + 2y}$

4. Fie $y + z^2 + 2xy + 3 = 0$. Calculați $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

<u>Soluție</u>:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+2x}{2z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1+2x}{2z}\right) = \frac{(1+2x)\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}}{4z^2} = \frac{2(1+2x)\left(-\frac{1+2x}{2z}\right)}{4z^2} = -\frac{(1+2x)^2}{4z^3}$$

Tema: extreme cu legături

1. Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z)=xyz$, având legăturile $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \end{cases}$.

<u>Soluție</u>: Notăm $\varphi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xyz+\lambda_1(x+y+z-5)+\lambda_2(xy+yz+zx-8)$ și rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=yz+\lambda_1+\lambda_2(y+z)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=xz+\lambda_1+\lambda_2(x+z)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=xy+\lambda_1+\lambda_2(x+y)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}=x+y+z-5=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}=xy+yz+zx-8=0 \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu *x*, a doua cu *y* și le scădem: $(x-y)(\lambda_1+\lambda_2 z)=0$. Pentru $x=y$ sistemul devine: $\begin{cases} xz+\lambda_1+\lambda_2(x+z)=0 \\ x^2+\lambda_1+2\lambda_2 x=0 \\ 2x+z-5=0 \\ x^2+2xz-8=0 \end{cases}$; din ecuația a 3-a, $z=5-2x$ și ultima ecuație devine $3x^2-10x+8=0$ având soluții 2 și $\dfrac{4}{3}$ Corespunzător, obținem soluțiile complete $x=2, y=2, z=1, \lambda_1=4, \lambda_2=-2$ și $x=\dfrac{4}{3}, y=\dfrac{4}{3}, z=\dfrac{7}{3}, \lambda_1=\dfrac{16}{9}, \lambda_2=-\dfrac{4}{3}$

Pentru prima soluție avem $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $rang\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)=2$, deci $p=2$, $m=3$ adică o singură variabilă independentă, *x* sau *y*.

Diferențialele funcțiilor implicite se obțin din sistemul de legături:

$$\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ 3dx+3dy+4dz=0 \end{cases} \Rightarrow dz=0, dy=-dx;$$

$$d^2\varphi=2[(z+\lambda_2)dxdy+(y+\lambda_2)dxdz+(x+\lambda_2)dydz)]=-2dxdy;$$

Diferențiala de ordin 2 a lui g se va obține exprimând dy și dz în funcție de dx: $d^2g = 2dx^2$ care este pozitiv definită, deci punctul $(2,2,1)$ este punct de minim. Analog se arată că punctul $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ este punct de maxim deoarece în acest caz avem

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix},$$

$$d^2\varphi = 2[(z+\lambda_2)dxdy + (y+\lambda_2)dxdz + (x+\lambda_2)dydz)] = 2dxdy;$$

$$d^2g = -2dx^2$$

care este negativ definită.

Datorită simetriei sistemului vom avea încă 4 soluții, corespunzătoare cazurilor $y = z$ și $z = x$.

2. Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, f(x,y) = 6 - 4x - 3y$, având legăturile $x^2 + y^2 = 1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,\lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ și rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

având soluțiile $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{5}{2}\right)$ și $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},-\frac{5}{2}\right)$.

Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2\lambda[dx^2 + dy^2]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $xdx + ydy = 0$. Pentru prima soluție, exprimăm $dy = -\frac{4}{3}dx$, deci $d^2g = \frac{125}{9}dx^2$, adică primul punct este de minim legat. Pentru cea de-a doua soluție avem $d^2g = -\frac{125}{9}dx^2$ adică maxim legat.

3. Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, f(x,y) = xy$, având legăturile $x + y = 1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$ și rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

având soluția $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2[dxdy + dyd\lambda + d\lambda dx]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $dx + dy = 0$. deci $d^2g = -2dx^2$, adică punct de maxim legat.