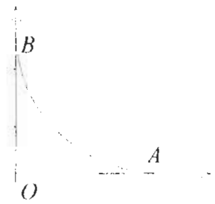
Formula lui Green, Schimbări de coordonate



Exercițiu. $\oint_{FrD} xydx + (x+y)dy$, unde D este domeniul mărginit de axele de coordonate şi parabola $y = (x-1)^2$, parcurs în sens direct.

Soluție. Utlizăm formula lui Green:

$$\oint_{FrD} xydx + (x+y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{(x-1)^2} (1-x)dy \right] dx = \frac{1}{4}$$

Exercițiu. $\oint_{FrD} x^2 ydx + y^3 dy$, unde D este rombul din figura alăturată iar frontiera este parcursă în sens direct.

Soluție. Aplicăm formula lui Green $\oint_{FrD} x^2 ydx + y^3 dy = -\iint_D x^2 dxdy$ iar mai departe descompunem domeniul în două subdomenii aflate deasupra, respectiv sub axa Ox.

$$\int_0^1 \left[\int_{y-1}^{1-y} x^2 dx \right] dy + \int_{-1}^0 \left[\int_{-y-1}^{y+1} x^2 dx \right] dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (1-y)^3 dy + \frac{2}{3} \int_{-1}^0 (y+1)^3 dy = \frac{1}{3}$$

în concluzie $\oint_{FrD} x^2 ydx + y^3 dy = -\frac{1}{3}$

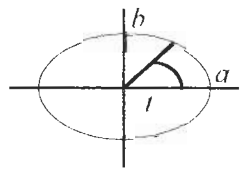
Exercițiu. Aria cercului

Soluție. Considerăm parametrizarea cercului de rază r, cu centrul în O $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

$$A = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t \right) dt = \frac{r^2}{2} 2\pi = \pi r^2$$

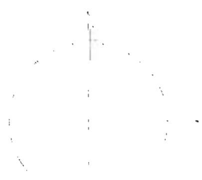
Exercițiu. Aria elipsei

Soluție. Considerăm parametrizarea $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$



$$A = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t \right) dt = \frac{ab}{2} 2\pi = \pi ab$$

Exercițiu. $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ unde D este discul de rază 1, cu centrul în origine



Soluție. Utilizăm transformarea în coordonate polare.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi], \left| \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} \right| = r$$

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr \right] d\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Exercițiu. $\iint_D ydxdy$ unde D este semidiscul de rază 1 din figură

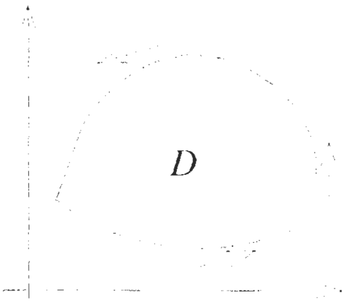
Soluție. Utilizăm transformarea în coordonate polare.

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r \in [0,1], \varphi \in [0, \pi], \left| \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_D ydxdy = \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} r^2 \sin\varphi\, dr d\varphi = \int_0^{\pi} \left[\sin\varphi \int_0^1 r^2 dr \right] d\varphi = \frac{2}{3}$$

Formula lui Green

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu având frontiera curbă închisă, simplă şi netedă pe porţiuni. Fie $P, Q: \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue şi există $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}: \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue. Atunci:

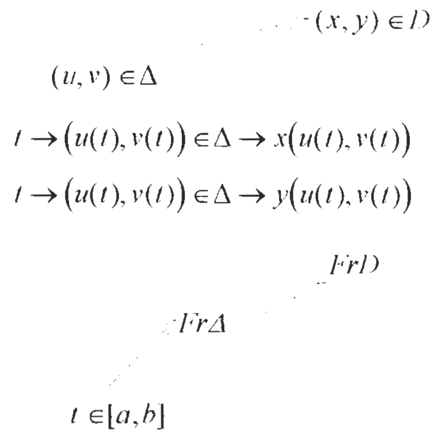


$$\oint_{Fr(D)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Corolar $Aria(D) = \frac{1}{2} \oint_{Fr(D)} xdy - ydx$

Schimbarea de variabilă în integrala dublă

Fie $F: \overline{\Delta} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o transformare regulată pe Δ având derivatele parţiale mixte de ordin 2 continue.
Notăm $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), x = x(u,v), y = y(u,v)$.
Fie $D = F(\Delta)$ şi $F(Fr(\Delta)) = Fr(D)$; presupunem că $Fr(\Delta)$ este închisă, simplă şi netedă pe porţiuni.



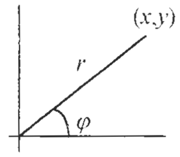
Teoremă. Fie $f: \overline{D} \to \mathbb{R}$, continuă şi $\overline{D}$ compactă, atunci:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \right| dudv$$

unde $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

Coordonate polare

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \left| \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$



Coordonate polare generalizate (pe elipsă)

$$\begin{cases} x = ra\cos\varphi \\ y = rb\sin\varphi \end{cases}, \quad \left| \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} \right| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$