Formula lui Stokes, Câmpuri vectoriale

Formula lui Stokes

Exprimă integrala curbilinie în spațiu prin intermediul unei integrale de suprafață. Condiția fundamentală este: <u>curba este bordul unei suprafețe</u>. **Circulația câmpului vectorial prin bordul suprafeței este egală cu fluxul rotorului prin suprafață.**

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ suprafață parametrizată netedă, deschisă, orientată, simplă de clasă C^2 astfel încât $\partial S = Fr(S)$ este un drum închis neted.

Fie $F: T \to \mathbb{R}^3, S \subset T, F \in C^1(T), F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, atunci:

$$\iint_S \left(rot\vec{F} \cdot \vec{n} \right) ds = \oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz$$

adică $\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cos\gamma \right] ds = \oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz$ unde $\vec{n}$ este normala suprafeței S iar sensul de parcurgere al bordului ∂S este cel care "lasă domeniul în stânga".

Formula gradientului

Dacă $\varphi: T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \varphi \in C^1(T), S = Fr(T)$, atunci $\iint_S \varphi \vec{n} d\sigma = \iiint_T grad\varphi dxdydz$

Câmpuri irotaționale

Definiție. Câmpul $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ se numește <u>irotațional</u> dacă $rot\vec{F}(a) = 0, \forall a \in T$, adică

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Teoremă. Câmpul $\vec{F}$ este irotațional dacă și numai dacă circulația sa în lungul oricărui drum închis neted pe porțiuni, inclus în T este nul

Teoremă. Câmpul $\vec{F}$ este irotațional dacă și numai dacă există $\varphi: T \to \mathbb{R}, F = grad\varphi$

Câmpuri solenoidale

Definiție. Câmpul $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ se numește <u>solenoidal</u> dacă:

$div\vec{F}(a) = 0, \forall a \in T$, adică $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

Teoremă. Câmpul $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ este solenoidal dacă și numai dacă fluxul său prin frontiera închisă a oricărui compact elementar inclus în T este nul.

Teoremă. Câmpul $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ este solenoidal dacă și numai dacă este local un câmp de rotori, adică $\forall a \in T$ există $V \in Vec(a)$ și $\vec{v}: V \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 astfel încât $\vec{F} = rot\vec{v}$

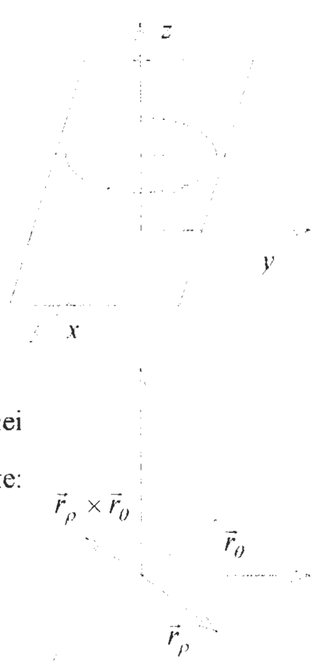
Câmpuri armonice

Definiție. Câmpul $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ se numește <u>armonic</u> dacă este irotațional și solenoidal.

Teoremă. Câmpul $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ este armonic dacă și numai dacă există un câmp scalar (funcție armonică) $\varphi: T \to \mathbb{R}$, $\Delta\varphi = 0$, astfel încât $F = grad\varphi$.

Formula lui Stokes

Exercițiu. Calculați direct și cu formula lui Stokes: $\oint\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$



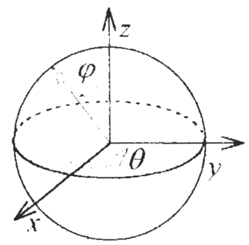
C fiind elipsa: $x^2+y^2=1, x+z=1$

Soluție. Elipsa plină are parametrizarea $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=1-\rho\cos\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,1]$, $\vec{r}_\rho=\cos\theta\cdot\vec{i}+\sin\theta\cdot\vec{j}-\cos\theta\cdot\vec{k}$ $\vec{r}_\theta=-\rho\sin\theta\cdot\vec{i}+\rho\cos\theta\cdot\vec{j}+\rho\sin\theta\cdot\vec{k}$ iar produsul corespunzător sensului pozitiv este $\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\theta=\rho\cdot\vec{i}+\rho\cdot\vec{k}$. Parcurgera bordului se face astfel încât, imaginar, călătorul care parcurge curba, având capul pe direcția normalei $\dfrac{\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\theta}{\|\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\theta\|}$, sa mențină suprafața pe stânga. Așadar, parametrizarea bordului elipsei este: $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=1-\cos\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ și integrala este egală cu:

$$\int_0^{2\pi}\left[(\sin\theta-1+\cos\theta)(-\sin\theta)+(1-\cos\theta-\cos\theta)\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)\right]\sin\theta d\theta=-4\pi$$

Cu formula lui Stokes, avem $\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ și $\oint\limits_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S rot\vec{F}\cdot\vec{n}ds$ și folosim parametrizarea elipsei pline:

$$\iint\limits_S\left[rot\vec{F}\cdot\vec{n}\right]ds=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\cdot\frac{\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\theta}{\|\vec{r}_\rho\times\vec{r}\|}\right]\|\vec{r}_\rho\times\vec{r}\|d\theta d\rho=$$



$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\rho+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)0+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\rho\right]d\theta d\rho=\int_0^1\int_0^{2\pi}(-4\rho)d\theta d\rho=-4\pi$$

Exercițiu. $\oint\limits_{\partial S} zdx+zdy+ydz$, unde ∂S este bordul emisferei mărginite de sfera de centru O și rază 1 și planul $x+y=0$, parcurs în sens trigonometric, din punctul de vedere al unui observator situat în primul octant.

Soluție. Pornim de la coordonatele sferice: $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$, în cazul dat: $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$, $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$, $z=\cos\varphi, \varphi\in[0,2\pi]$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\varphi\right)d\varphi=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Prin Stokes: pornim de la parametrizarea emisferei: $x=\sin\varphi\cos\theta$, $y=\sin\varphi\sin\theta$, $z=\cos\varphi$, $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$, $\varphi\in[0,\pi]$, avem $\vec{r}_\theta=-\sin\varphi\sin\theta\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cos\theta\cdot\vec{j}$, $\vec{r}_\varphi=\cos\varphi\cos\theta\cdot\vec{i}+\cos\varphi\sin\theta\cdot\vec{j}-\sin\varphi\cdot\vec{k}$ și calculăm $\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi=-\sin^2\varphi\cos\theta\cdot\vec{i}-\sin^2\varphi\sin\theta\cdot\vec{j}-\sin\varphi\cos\varphi\cdot\vec{k}$. Pentru orientarea suprafeței se observă imediat că dacă $\theta=\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ avem $r_\theta=-\vec{i}$, $r_\varphi=-\vec{k}$ și $r_\theta\times r_\varphi=-\vec{j}$. Aplicăm formula și calculăm:

$$\iint\limits_S rot\left(z\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}\right)\cdot\vec{n}ds=\iint\limits_S\vec{j}\cdot\vec{n}ds=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\pi}\vec{j}\cdot\frac{\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi}{\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi\|}\|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi\|d\varphi d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\pi}\vec{j}\cdot(\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi)d\varphi d\theta=$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\pi}(-\sin^2\varphi\sin\theta)d\varphi d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(-\sin\theta)d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=(-\sqrt{2})\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Planul bordului se află între noi și "călătorul imaginar" care are capul în direcția normalei (cazul particular folosit în orientarea suprafeței în care normala este $-\vec{j}$) deci asemenea vecinului de la etajul superior care merge în sens trigonometric (din punctul nostru de vedere) și lasă domeniul în dreapta. Așadar prin formula lui Stokes am calculat integrala curbilinie în sens invers trigonometric adică am obținut valoarea din primul calcul cu semn schimbat!