

Studiați convergența seriilor:

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n + 2^n + 1}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{2 + \sqrt{n+1}}{3 + n}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}, a > 0$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{n! + 2^n}{n^n}$
6. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}$
7. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}, \alpha > 0$
8. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n \cdot (n+1)}$
9. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n + 2^n}$
10. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{3n + 5^n}$
11. $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n} \cos \frac{1}{n}$
12. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n+1)}{(n+2)^3}$

Determinați mulțimea de convergență a seriilor de puteri:

1. $\sum_{n \geq 1} n! x^n$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2n + n^2 + n^3}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{3 + 2n}}$
4. $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^n x^n$
5. $\sum_{n \geq 1} (2^n + 3^n) x^n$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{n+2}}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{2n+1}}$

Studiați convergența șirurilor de funcții:

1. $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{2n}{3n+x}$
2. $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+3n}{x+2n+5}$
3. $f_n : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x-1}{x(x+n)}$
4. $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x \sin nx}{nx+1}$

Studiați convergența seriilor de funcții:

1. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ pe $[-1,1]$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n \cos nx}{n^2}$ pe $(-1,1)$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+x^n} \frac{1}{2^n}$ pe $(-1,1)$

Calculați

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \int_2^5 e^{-n(x^2+15)} dx$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{4n^2 + x^3} dx$

Dezvoltați în serie, după puterile lui x , funcțiile de mai jos, precizând și mulțimea pe care funcțiile se dezvoltă în serie de puteri.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$
2. $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x)$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$
4. $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$
5. $f : \mathbb{R} - \{2,3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$
6. $f : \mathbb{R} - \{1,4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$
7. $f : \mathbb{R} - \{1,2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$
8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$

Dezvoltați în serie, după puterile lui $x-1$, funcția $f : \left(-\frac{3}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x+3}$

Calculați

1. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n x^n, x \in (-1, 1)$
2. $x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots, x \in [0, 1)$
3. $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots, x \in (-1, 1)$

Calculați derivatele parțiale de ordin I și II și Jacobianul funcțiilor:

1. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x e^y z, x + y^2 z)$.
2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy + x + y^2 + 5$.
3. $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xy, x^2 + y, x \ln y)$.
4. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x^2 z, x - 3y, x^2 + zy)$
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (x + x^2, 2x + 1)$.

Calculați diferențialele de ordin I și II ale funcțiilor:

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x \ln(y^2 + 2) + xy^3$.
2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + 1} + zy$.

Determinați punctele de extrem local ale funcțiilor următoare:

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 1$.
4. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$.
5. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1$.
6. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 1$.

Calculați derivatele funcțiilor implicite rezultate din relațiile date mai jos:

1. $\begin{cases} ux + v - y = 0 \\ xu + y + v - 1 = 0 \end{cases}; \frac{\partial x}{\partial u} \text{ și } \frac{\partial y}{\partial v}$.
2. $x \sin(y + z) + xz = 0; \frac{\partial z}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial z}{\partial y}$.
3. $\begin{cases} x^2 + xz + 2y = 1 \\ x + y + 3z^2 = 4 \end{cases}; \frac{\partial x}{\partial z} \text{ și } \frac{\partial y}{\partial z}$.
4. $x + y^2 + 2xz + 3 = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
5. $(y + z)^2 + xy + 3 = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
6. $\begin{cases} y^2 + x + xz = 1 \\ yz - x + z = 4 \end{cases}; \frac{\partial y}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial z}{\partial x}$.
7. $\begin{cases} x^2 + y + xz = 1 \\ xy - x + z = 4 \end{cases}; \frac{\partial y}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial z}{\partial x}$.
8. $y + x^2 + 2xyz + 3 = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.