

Derivabilitate în \mathbb{R}^m

Definiție. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ și $a \in A$; spunem ca funcția f este **diferențiabilă în sens Frechet** în a dacă $\exists T_a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, aplicație liniară și continuă astfel încât:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T_a(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Notație. Diferențiala Frechet a funcției f în punctul a se notează prin $df(a)$ sau $f'(a)$.

Caz particular: Derivata unei aplicații liniare și continue T , coincide cu T .

Teoremă. Diferențiala Frechet a funcției f în punctul a este unică.

Teoremă. Dacă funcția f este diferențiabilă Frechet în a atunci f este continuă în a .

Derivate parțiale

Definiție. Se numește **derivată parțială** a componentei f_i a funcției f , pe direcția (după variabila) j , derivata funcției reale $(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) \ni \tau \rightarrow f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, \tau, a_{j+1}, \dots, a_m)$ în a_j , adică:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_m) - f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m)}{t}$$

Teoremă. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, a \in A$, este diferențiabilă Frechet în a , atunci există $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \forall i, j$ iar matricea

asociată aplicației liniare și continue $f'(a)$ are componentele $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Reciproc, dacă există $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \forall i, j$ și sunt continue pe vecinătate a lui a , conținută în A , atunci f este diferențiabilă în a .

Se numește **matrice Jacobiană** a funcției f în punctul a , matricea asociată diferențialei Frechet, $f'(a)$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Derivata compunerii:

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$$

Cazuri particulare:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \varphi = f \circ u, \text{ atunci } \varphi' = \frac{\partial f}{\partial u_1} u_1' + \frac{\partial f}{\partial u_2} u_2' + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} u_m'$$

$$t \rightarrow f((x(t), y(t)))$$

$$(f(x(t), y(t)))' = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Derivabilitate în \mathbb{R}^m

1. Calculați derivatele parțiale și Jacobianul funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy + x + y^2 + 5$.

Soluție. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y, J_f(x, y) = (y + 1, x + 2y)$

2. Calculați derivatele parțiale și Jacobianul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (x + x^2, 2x + 1)$.

Soluție. $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x) = 1 + 2x, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) = 2, J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Calculați derivatele parțiale și Jacobianul funcției $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xy, x^2 + y, x \ln y)$.

Soluție. $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y, \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2x, \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 1, \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = \ln y, \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y}$,

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \\ \ln y & \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

4. Calculați derivatele parțiale și Jacobianul parametrizării $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}$.

Soluție. $\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos t, \frac{\partial x}{\partial t} = -\rho \sin t, \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin t, \frac{\partial y}{\partial t} = \rho \cos t, J_F = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho \sin t \\ \sin t & \rho \cos t \end{pmatrix}$

5. Calculați, folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, derivatele parțiale și Jacobianul compunerii funcțiilor $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + y, xy, x^2 + 2xy)$ și

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (xz, y^2 + z).$$

Soluție. Fie $h = g \circ f, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = g(f(x, y))$, folosim formula Jacobianului compunerii de funcții:

$$J_h(x, y) = J_g(f(x, y)) \cdot J_f(x, y). \text{ Dar, } J_g(f(x, y)) = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy & 0 & x + y \\ 0 & 2xy & 1 \end{pmatrix} \text{ și } J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 2x + 2y & 2x \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$J_h = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6xy + 4y^2 & 3x^2 + 4xy \\ 2xy^2 + 2x + 2y & 2x^2y + 2x \end{pmatrix}. \text{ Derivatele parțiale ale funcției compuse pot fi obținute fie din Jacobian, fie prin}$$

calcul, de exemplu: $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g_1}{\partial f_1}(f_1, f_2, f_3) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g_1}{\partial f_2}(f_1, f_2, f_3) \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g_1}{\partial f_3}(f_1, f_2, f_3) \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) =$
 $f_3(x, y) \cdot 1 + 0 \cdot y + f_1(x, y) \cdot (2x + 2y) = x^2 + 2xy + (x + y)(2x + 2y) = 3x^2 + 6xy + 2y^2$

6. Se consideră $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y, 2xy)$, calculați derivatele parțiale în funcție de parametrii transformării de coordonate polare în plan.

Soluție: $\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = 2\rho \cos t \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t = 2\rho \cos^2 t + \sin t$, și analog obținem toate derivatele

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -2\rho^2 \sin t \cos t + \rho \sin t, \frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 4\rho \sin t \cdot \cos t, \frac{\partial f_2}{\partial t} = 2\rho^2 \cos 2t$$

7. Calculați derivatele parțiale de ordin 2 ale funcției $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x^2z + y, xyz)$.

Soluție: Derivatele parțiale de ordin I sunt $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xz, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial z} = x^2, \frac{\partial f_2}{\partial x} = yz, \frac{\partial f_2}{\partial y} = xz, \frac{\partial f_2}{\partial z} = xy$ iar cel

de ordin II se obțin prin derivarea acestora: $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2z, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} = 2x, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0,$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} = 2x, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = z, \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} = y, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = z, \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} = x, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} = y,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} = x, \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0.$$

