

Extreme cu legături

Problemă. Fie $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ și $S = \{x \mid F_1(x) = 0, \dots, F_p(x) = 0\}$, $p < m$. Să se determine $\min_{u \in S} f(u)$. O astfel de problemă poartă numele de **extrem al funcției f , condiționat** de legăturile $F_1(x) = 0, \dots, F_p(x) = 0$. Legăturile sunt reprezentate sub forma unui sistem de ecuații.

Principiul de rezolvare urmărește transformarea problemei date într-o problemă echivalentă dar fără legături, astfel: Fie $F: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x))$, $a \in V \subset \mathbb{R}^m$ a.î. $\text{rang} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right) = p$ și $F(a) = 0$. Din teorema funcțiilor implicite există $U \in \text{Vec}(a_{p+1}, \dots, a_m)$ și $\varphi_1, \dots, \varphi_p: U \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

$$F_i(\varphi_1(x_{p+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_p(x_{p+1}, \dots, x_m), x_{p+1}, \dots, x_m) = 0$$

Definim funcția

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_{p+1}, \dots, x_m) = f(\varphi_1(x_{p+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_p(x_{p+1}, \dots, x_m), x_{p+1}, \dots, x_m)$$

Teoremă. Fie $a \in S$, $\text{rang} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right) = p$, atunci sunt echivalente:

- a este minim legat pentru f
- a este extrem local pentru g

Problema conține însă funcții date sub formă implicită, de aceea introducem o nouă funcție:

$\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \dots + \lambda_p F_p(x)$. Modul în care scalarii λ_i "multiplică" legăturile dă numele de **metoda multiplicatorilor lui Lagrange**.

Teoremă. Fie $a \in \mathbb{R}^m$, $\text{rang} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right) = p$, atunci sunt echivalente:

- $a \in S$ și a este extrem local pentru g
- există $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ astfel încât (a, λ) este extrem local pentru φ

Diferențiala lui φ , pe o vecinătate a punctului (a, λ) , coincide cu diferențiala lui g pe o vecinătate a punctului (a_{p+1}, \dots, a_m)

$$d\varphi(\varphi_1(x_{p+1}, \dots, x_m), \varphi_2(x_{p+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_p(x_{p+1}, \dots, x_m), x_{p+1}, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = dg(x_{p+1}, \dots, x_m)$$

ceea ce conduce la următoarea:

Observație practică. Determinarea punctului critic al lui φ este urmată de calculul diferențialei de ordin 2 a lui g .

1. Determinați punctele de extrem ale funcției $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = xyz$, având legăturile $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}$.

Soluție: Notăm $\varphi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$ și rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = x + y + z - 5 = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = xy + yz + zx - 8 = 0 \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu x , a doua cu y și le scădem: $(x - y)(\lambda_1 + \lambda_2 z) = 0$. Pentru $x = y$ sistemul devine:

$$\begin{cases} xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0 \\ x^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \\ x^2 + 2xz - 8 = 0 \end{cases}; \text{ din ecuația a 3-a, } z = 5 - 2x \text{ și ultima ecuație devine } 3x^2 - 10x + 8 = 0 \text{ având soluțiile } 2 \text{ și } \frac{4}{3}$$

Corespunzător, obținem soluțiile complete $x = 2, y = 2, z = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ și $x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{7}{3}, \lambda_1 = \frac{16}{9}, \lambda_2 = -\frac{4}{3}$

Pentru prima soluție avem $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\text{rang}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right) = 2$, deci $p = 2, m = 3$

adică o singură variabilă independentă, x sau y . Diferențialele funcțiilor implicite se obțin din sistemul de legături:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ 3dx + 3dy + 4dz = 0 \end{cases} \Rightarrow dz = 0, dy = -dx; d^2\varphi = 2[(z + \lambda_2)dxdy + (y + \lambda_2)dxdz + (x + \lambda_2)dydz] = -2dxdy; \text{ diferențiala de}$$

ordin 2 a lui g se va obține exprimând dy și dz în funcție de dx : $d^2g = 2dx^2$ care este pozitiv definită, deci punctul $(2, 2, 1)$

este punct de minim. Analog se arată că punctul $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ este punct de maxim deoarece în acest caz avem

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}, d^2\varphi = 2[(z + \lambda_2)dxdy + (y + \lambda_2)dxdz + (x + \lambda_2)dydz] = 2dxdy; d^2g = -2dx^2 \text{ care este negativ}$$

definită. Datorită simetriei sistemului vom avea încă 4 soluții, corespunzătoare cazurilor $y = z$ și $z = x$.

2. Determinați punctele de extrem ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 6 - 4x - 3y$, având legăturile $x^2 + y^2 = 1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ și rezolvăm sistemul: $\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ având soluțiile

$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$ și $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right)$. Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2\lambda[dx^2 + dy^2]$. Avem o singură legătură, de unde

obținem: $xdx + ydy = 0$. Pentru prima soluție, exprimăm $dy = -\frac{4}{3}dx$, deci $d^2g = \frac{125}{9}dx^2$, adică primul punct este de

minim legat. Pentru cea de-a doua soluție avem $d^2g = -\frac{125}{9}dx^2$ adică maxim legat.

3. Determinați punctele de extrem ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$, având legăturile $x + y = 1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$ și rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ având soluția $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2[dxdy + dyd\lambda + d\lambda dx]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $dx + dy = 0$. deci $d^2g = -2dx^2$, adică punct de maxim legat.